4. МОДЕЛІ ВАЖКОФОРМАЛІЗОВАНИХ ОБ’ЄКТІВ

4.1. Взаємозалік боргів підприємств. Будь-яка значна за своїми масштабами економічна система включає в себе десятки тисяч підприємств (фірм, корпорацій і т.д.), які обмінюються між собою товарами й послугами. Навіть дрібна фірма, що має відносно невелику кількість безпосередніх партнерів, побічно зв’язана (через зв’язки прямих і вторинних партнерів) з величезною кількістю підприємств, які входять у систему, її добробут прямо залежить від їх стану. Це твердження тим більш слушне для великих корпорацій, які підтримують партнерство з сотнями й тисячами економічних агентів.

Взаємозв’язок всіх ланок економічної системи добре проявляється при проведенні розрахунків між підприємствами за постачену продукцію. Дійсно, отримавши від своїх клієнтів виручку за представлений товар, підприємство витрачає її на закупівлю сировини й машин в інших фірм, на зарплату (тобто на закупівлю робочої сили), на рекламу та інші дії, які необхідні для його нормального функціонування. Тим самим в економічний оборот додатково залучається велика кількість партнерів даного підприємства. У свою чергу клієнти, які отримали від підприємства товар, спрямовують його на подальший перепродаж, використовують для виробництва власної продукції і т.д., також збільшуючи кількість агентів, які беруть участь в економічній діяльності.

Якщо поставки і платежі за них здійснюються своєчасно (в ідеалі миттєво), то з погляду фінансового обороту економічній системі нічого не загрожує. Для продовження своєї діяльності підприємствам немає необхідності використовувати значну частину своїх фінансових ресурсів, що знаходяться на банківських рахунках, ні, тим більше, продавати основні фонди (землю, будівлі, устаткування, технології). У дійсності між поставкою товару та його оплатою (або передплатою всього товару чи його частини і наступною поставкаою) завжди існує затримка в часі. Її мінімальне значення обумовлюється чисто технічними причинами, тому що завжди потрібний час на транспортування і розфасування товару, на проведення банківських переказів і т.д. При незначних лагах невеликих партій товару (або невеликих грошових сумах) підприємство на короткий час залучає частину своїх вільних фінансів, а потім швидко поповнює ці витрати з отриманих від своїх партнерів платежів.

Однак можливі ситуації, коли з якихось економічних, фінансових, внутрішньо- або зовнішньополітичних, соціальних, психологічних та інших причин час затримки платежів (поставок) стає порівнянним з часом обороту фінансів, а абсолютне значення (обсяг) невиконаних платежів або поставок порівнянними з обсягом вільних оборотних коштів підприємств. У цьому разі виникає так звана *криза неплатежів,* яка може призвести до серйозної кризи всієї економічної системи.

Дійсно, підприємство, яке не отримало гроші за поставлену продукцію (або оплатило товар, але не отримало його), не може розплатитися зі своїми постачальниками (оскільки обсяг боргів підприємству порівнянний з величиною його вільних коштів, то їх використання не може принципово покращити ситуацію). У свою чергу, постачальники не розраховуються зі своїми клієнтами, ті — зі своїми і т.д. Виникають довгі ланцюги неплатежів, що пронизують усю систему. Вони, очевидно, можуть складатися із N ланок, а їх загальна кількість досягає величини порядку N (N — загальна кількість підприємств). Сума абсолютних величин боргів по всіх ланцюгах може не тільки перевищувати вільні кошти підприємств, але й стає порівнянною з вартістю їх основних фондів (мова йде саме про суму абсолютних боргів, тому що будь-яке підприємство одночасно може бути як боржником, так і кредитором своїх партнерів). Система заходить у безвихідь — підприємства або повинні припинити виробництво, або знову позичати одне в одного кошти, збільшуючи підсумковий взаємний борг.

У принципі для розв’язання ситуації можливий підхід, коли якийсь уповноважений заклад (наприклад, головний національний банк) видає всім підприємствам єдиночасовий кредит, що дорівнює сумі всіх боргів. Тоді вони розраховуються між собою і потім повертають кредит. Але така кредитна емісія може спровокувати сильну інфляцію (виробництво товарів не збільшилось, а грошей у обороті стало раптом значно більше) з усіма її негативними наслідками.

У будь-якій кризі неплатежів певну роль завжди відіграє чисто «технічна» компонента, що пов'язана з недосконалістю самої процедури розрахунків. У подальшому будемо розглядати кризи, які породжуються саме цими факторами, відокремлюючись від економічних, політичних та інших причин їх виникнення.

Спочатку пояснимо суть проблеми на простому числовому прикладі для системи з трьох підприємств, кожне з яких має вільні кошти, що дорівнюють умовно одній фінансовій одиниці, й основні фонди, що дорівнюють 10 одиницям. Нехай перше підприємство винне другому 100 одиниць, друге заборгувало третьому 100 одиниць, і, нарешті, третє першому також 100 одиниць. Підсумковий абсолютний борг підприємств дорівнює 600 одиницям і величезний у порівнянні з їх фондами (30 одиниць), не говорячи вже про вільні кошти (3 одиниці). У той же час фінансове положення цієї системи фактично благополучне, тому що підсумковий «борг» кожного окремого підприємства (тобто сума коштів, які підприємство заборгувало іншим, та інші заборгували йому) дорівнює нулю. Очевидна процедура взаємозаліку полягає в одномоментному анулюванні (погашенні) всіх боргів: Оголошується, що ніхто нікому не винен, і партнери продовжують свою роботу, будучи вільними від боргового тягаря. Централізований кредит при цьому, природно, взагалі не потрібний.

Подібну операцію, що проведена „вручну", неможливо, звичайно, реалізувати для великої кількості підприємств з величезною кількістю фінансових обов'язків. Потрібні більш глибокі підходи, для розгляду яких необхідно спершу формалізувати задачу.

Отже нехай економічна система складається із N підприємств, які можуть мати взаємні борги. Позначимо борги n-го підприємства m-му через x_{nm}, де $1 \le n, m \le N$ ($x_{nm} < 0$, якщо перше підприємство заборгувало другому, і $x_{nm} > 0$ у протилежному разі). Ясно, що матриця $\|x_{nm}\|$ описує взаємні борги підприємств

$$\begin{vmatrix} 0 & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & 0 & \dots & x_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

тобто сукупність боргів описується кососиметричною матрицею розміру N x N з нульовою діагоналлю ($x_{nn} = 0$, оскільки підприємство самому собі не може заборгувати).

Сума всіх взаємних боргів обчислюється через індивідуальні борги за простою формулою

$$X = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left|x_{nm}\right|. \tag{4.1}$$

Величина (4.1) є однією з інтегральних кількісних характеристик фінансового положення системи: якщо вона порівнянна із сумою всіх вільних коштів підприємств B, тобто

$$\left|X\right| \geq B = \sum_{n=1}^{N} b_n , \tag{4.2}$$

то описувана нерівністю (4.2) ситуація і означає кризис неплатежів (тут $b_n > 0$ — індивідуальні вільні кошти підприємства).

Ще одна важлива характеристика — баланс кредитів і боргів (сальдо) кожного підприємства

$$S_n = \sum_{m=1}^{N} x_{nm} , \tag{4.3}$$

причому, як очевидно з (4.3), можливі варіанти $S_n > 0$, $S_n < 0$, $S_n = 0$. При $S_n > 0$ підприємство є в деякому сенсі кредитором підприємств-боржників, тобто тих, у кого $S_n < 0$ (при $S_n = 0$ підприємство по відношенню боргів «нейтральне»). При $\left|S_n\right| < b_n$ індивідуальний фінансовий стан підприємства, по суті, нормальний, оскільки його реальні сумарні борги (або кредити, що „видані" ним іншим) менше його вільних коштів.

Аналогічно, сумарне абсолютне сальдо системи

$$S = \sum_{n=1}^{N}\left|S_n\right| = \sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{m=1}^{N} x_{nm}\right| \tag{4.4}$$

є макропоказником її можливого фінансового „здоров'я". Якщо $S < B$, то вільних коштів у системі більше ніж дійсних боргів, і потенційно вона може успішно функціонувати (подібно системі трьох підприємств із наведеного вище прикладу).

Між величинами S, X завжди існує вказане співвідношення. Для будь-якої довільної матриці боргів виконується нерівність

$$S \leq X\,, \tag{4.5}$$

тобто підсумковий борг ніяк не може бути менше підсумкового сальдо.

Завдання погашення взаємних боргів полягає у тому, щоб знаючи матрицю x_{nm}, знайти матрицю x^*_{nm} „нових” боргів, для якої виконувалось би $X^* < X$. Очевидно, що ідеальним її розв’язанням буде $X^* = S \leq B$, тобто коли нерівність (4.5) стає рівнянням. Зазначимо, що тоді для благополучної, по суті, системи $S \leq B$ досягалося б співвідношення $|X^*| = |S| \leq B$, і після взаємозаліків вона могла б нормально функціонувати (хоча зменшення величини X у будь-якому випадку корисне).

При побудові математичної моделі процедуру взаємозаліку боргів послідовно використовується ряд дій, які аналогічні проведеним при дослідженні природничонаукових об’єктів. Перша з них — відмова на певному етапі від детального розгляду безлічі індивідуальних боргів і відповідних зв’язків між підприємствами. Перехід з мікрорівня на макрорівень подібний тому, як при опису великої кількості частинок газу відмовляються від необхідності підсліджувати траєкторію кожної частинки і вводять деякі усереднені характеристики, знання яких цілком достатнє для отримання детальної картини поведінки об’єкта. Процедура прослідժування ланцюгів неплатежів, що застосована вище для трьох підприємств, не тільки важка для виконання для N підприємств, але має й принциповий недолік. Дійсно, розглянемо спочатку ланцюг, в якому кожне підприємство з першого до $m-$го заборгувало іншому однакову суму і таку ж суму заборгувало $m-$е підприємство першому. Ланцюг замкнутий, і розв’язання очевидне — всі борги в ланцюгу погашаються. Нехай тепер $m-$е підприємство не заборгувало першому. Тоді ланцюг розімкнутий, і цей метод неможливо застосувати. У той же час просте розв’язання полягає в тому, що борги з другого до $m-1-$го анулюються, а борг першого переадресовується $m-$му. Економічний зміст переадресації відповідає вексельному звертанню, коли боргове зобов’язання змінює хазяїв, і в результаті у боржника (перше підприємство) з’являється новий кредитор (m – е підприємство).

На відміну від ситуації з боргами у ланцюгах повна система боргів по всіх ланцюгах замкнута, тому що розглядаються взаємні борги. Дійсно, із властивості $x_{nm} = -x_{mn}$ виходить, що

$$X = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} x_{nm} = 0$$

для будь-якої сукупності неплатежів. Враховуючи, що $S_n = \sum_{m=1}^{N} x_{nm}$ з останнього рівняння отримуємо

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} x_{nm} = \sum_{n=1}^{N} S_n = 0, \qquad (4.6)$$

або

$$\sum_{S_n>0} S_n = -\sum_{S_n<0} S_n = \frac{S}{2}, \qquad (4.7)$$

тобто сума позитивних сальдо підприємств дорівнює за абсолютною величиною сумі від’ємних сальдо. Розглядувана на макрорівні система взаємних боргів має властивість «симетричної консервативності» (4.6), а «закон збереження» (4.5) — аналог звичайних законів збереження (маси, енергії і т.д.) стосовно до розглядуваної ситуації.

Рівняння (4.7) пояснює побудову математичної моделі ідеального взаємозаліку, який робиться при наступних умовах:

1)всі борги $x_{nm} = -x_{mn}$ відомі й визнаються підприємствами;

2)при проведенні взаємозаліку сальдо підприємств S_n залишаються незмінними: $S*_n = S_n$, тобто індивідуальне фінансове положення кожного з них у цьому сенсі не змінюється;

3)частина боргів x_{nm} списується, а частина переадресовується, тобто у підприємств можуть з’явитися нові боржники й кредитори і зникне частина старих.

Суть макропроцедури взаємозаліку полягає в тому, що замість величин x_{nm} розглядаються величини S_n. Підприємства з $S_n < 0$ оглошуються боржниками (в розмірі своїх сальдо), а підприємства з $S_n > 0$ — кредиторами (в тих же розмірах). Потім борги підприємств з $S_n < 0$ якимось чином розподіляються між кредиторами, тобто знаходиться нова система боргів $x*_{nm}$. При цьому виконані закон збереження (4.6), умова 2) і досягається рівняння $X* = S$; тому розв'язання задачі є оптимальним.

Таких оптимальних розв'язань може бути, взагалі кажучи, багато, тому що розподілити борги між кредиторами можна різними способами. Наведемо два найбільш простих і наочних. Перший з них подається нескладною формулою, за якою нові борги обчислюються через старі:

$$x*_{nm} = \frac{S_n|S_m| - S_m|S_n|}{S}. \tag{4.8}$$

Згідно з алгоритмом (4.8) борг будь-якого підприємства (дорівнює S_n, якщо $S_n < 0$) розписується по підприємствах-кредиторах у частках, що пропорціональні величинам їх сальдо (равним S_m, якщо $S_m > 0$). Підприємствам з більшим позитивним сальдо припадає від кожного з боржників більша частина його боргів, причому в сумі вони дають величину S_m. Для підприємств з нульовим сальдо взаємозалік зводиться до погашення всіх їх боргів і всіх боргів їм.

Відмітимо, що в розв'язанні (4.8) для нових боргів маємо $x*_{nm}$ = 0 при $S_n < 0$, $S_m < 0$ або $S_n > 0$, $S_m > 0$ (після взаємозаліку боржники не винні боржникам, а кредитори — кредиторам). Це означає, что кількість одержаних фінансових зв'язків між підприємствами значно менше максимально можливого, коли кожне підприємство є боржником або кредитором будь-якого іншого, і матриця боргів не має нульових елементів (окрім, зрозуміло, діагональних).

Кількість зв'язків може бути значно зменшена, якщо провести попереднє упорядкування підприємств за абсолютним значенням їх сальдо й установити безпосередньо зв'язки між боржниками і кредиторами одного масштабу (великих з великими, мілких з мілкими і т. д.). У спеціальних випадках в одного боржника залишається один кредитор, і навпаки. Відмітимо, що ці та інші процедури взаємозаліку мають сенс лише при виконанні умов 1)-3), тобто при визначеній згоді між підприємствами.

Причини, що не дозволяють дотриматись даної угоди, можуть бути вельми різноманітні — від небажання сплачувати борги тому, що це вигідно боржнику, до наслідків санкцій міжнародних або інших організацій, коли фінансові кошти підприємств заморожуються. Ці обставини і визначають рамки застосування моделі взаємозаліку, при побудові якої суттєво використовувались аналогії з моделями деяких природничо наукових об’єктів.

4.2. Макромодель рівноваги ринкової економіки. Будь-який учасник ринкового економічного процесу діє відповідно до своїх індивідуальних інтересів (отримання прибутку, покращення умов праці, мінімізація ризику, економія ресурсів і т.д.). Найпростіший варіант такої системи — економіка з досконалою конкуренцією, коли кожний суб’єкт економічно мізерно малий і не здійснює безпосереднього впливу на рівень виробництва, ціни, зарплату та інші макропоказники. У той же час відокремлені дії економічних агентів можуть додаватися через існуючі в системі відношення купівлі-продажу у сукупну узгоджену картину дій працедавців і найманих працівників, фінансистів та вкладників і т. д. Якщо в результаті такої колективної взаємодії загальне виробництво товарів та послуг у системі узгодженого загальним попитом на них, то такий стан економіки називається *рівноважним*, а ціни, що при цьому встановлюються, — *рівноважними ринковими цінами*. Баланс між попитом і пропозицією має місце , як припускається, не довільних, а саме при цих ринкових цінах, що означає, зокрема, платоспроможність попиту.

Одне з важливих завдань економічної науки — визначення умов рівноваги економіки, в тому числі рівноважних ринкових цін. Найбільш прості математичні моделі економічної рівноваги будуються при наступних припущеннях:

1)досконала ринкова конкуренція, що означає відсутність як великих виробничих корпорацій (і тим більше монополій), так і об’єднань працівників, які можуть диктувати свої умови для всієї системи;

2)незмінність виробничих можливостей системи: устаткування, виробничі приміщення, технології не змінюються з часом;

3)незмінні з часом економічні інтереси партнерів:підприємці не намагаються збільшити свій прибуток, працівники — зарплату, інвесторів влаштовують відсотки, які вони отримують по цінних паперах, і т. д.

Моделі, що відповідають цим припущенням, описують частковий випадок «застиглої» за часом ідеальної ринкової економіки. Однак, вони дають відповідь на запитання про можливість існування економічної рівноваги, що формується із ринкового «хаосу», і, крім того, зв'язують між собою основні макропоказники економічної системи. Одна з таких макромоделей — *модель Кейнса* — розглядає вякості агентів наймачів і найманих, споживачів і ощадників, виробників і інвесторів, які діють на ринку робочої сили, продуктів і грошей, тобто розподілення та обміну цих товарів (праця, продукти, гроші) між собою.

Перший макропоказник системи — *національний дохід Y*, який є єдиним (для простоти) продуктом, що виробляється в одиницю часу. Цей продукт створюється виробничим сектором економіки, а його величина дається функцією *F*, що залежать від кількості й якості ресурсів, складу основних фондів та *кількості зайнятих працівників R* (другий макропоказник). Відповідно до припущення 2) у стані рівноваги виробнича функція *R*, а з нею і продукт *Y* визначається лише зайнятістю, тобто

$$Y = F(R). \qquad (4.9)$$

Відносно $F(R)$ звичайно вважається, що $F(0)=0$, $F'(R)>0$ і $F''(R)<0$ при $R>0$. Функція $F(R)$ має властивість «насичення»: зі збільшенням R випуск зростає все повільніше. Такий підхід повністю виправданий, оскільки при надлишку зайнятих на виробництві для них попросту не знайдеться відповідного фронту робіт. Один або кілька старателів, які виявили золоту жилу, швидко та без перешкод досягнуть своєї максимальної продуктивності; при більшій кількості робітників вони починають заважати один одному, їх індивідуальна продуктивність зменшується; нарешті, при дуже великій кількості старателів добуток золота взагалі перестає рости, тому що новоприбулі не можуть підступитися до місця розробки.

Співвідношення (4.9) дає зв'язок між ринками праці (R) і продукту (Y). Додаткове співвідношення визначається за допомогою одного з основних постулатів класичної політекономії:

4)*заробітна плата* s працівника дорівнює вартості продукту, що була б втрачена при зменшенні зайнятості на одну одиницю (заробітна плата дорівнює граничному продукту праці).

Зазначимо, що в постулаті 4) не враховуються (вважаються малими) інші витрати, які відпали б внаслідок скорочення одного робочого місця (витрати на ресурси, обладнання і т. д.). Таким чином, із постулату отримаємо

$$\Delta Y^{(1)} \cdot p = s,$$

де $\Delta Y^{(1)}$ — кількість продукту, що втрачена при зменшенні зайнятості на одиницю, p — *ціна продукту* (так що зліва в цьому рівнянні записана величина втраченої вартості). Якщо зайнятість змінилася на величину ΔR, то з останнього рівняння, очевидно, маємо

$$\Delta Y \cdot p = s \cdot \Delta R,$$

де $\Delta Y = \Delta Y^{(1)} \cdot \Delta R,$ — вартість, що втрачена або отримана при зміні кількості працівників на ΔR. Вважаючи ΔR і ΔY малими в порівнянні з R та Y, перепишемо останнє рівняння у диференціальній формі:

$$\frac{dY}{dR} = \frac{s}{p},$$

або, взявши до уваги (4.9),

$$F'(R) = \frac{s}{p}. \tag{4.10}$$

Оскільки $F(R)$ задана (а з нею відома функція $F'(R)$), то при відомих макропоказниках s та p із (4.10) можна знайти рівень зайнятості R, а з (4.9) величину продукту Y. Нагадаємо: цей рівень відповідає кількості працівників, які згодні працювати за дану зарплату при даних цінах та інших характеристиках системи, а не взагалі можливій кількості найманих працівників. Передбачається, що для забезпечення рівноважного рівня зайнятості завжди знайдеться достатня кількість бажаючих працювати на існуючих умовах, тобто

5) пропозиція праці не стримує виробництва, кількість зайнятих визначається попитом на працю з боку підприємців.

Два рівняння (4.9), (4.10) включають чотири величини. Відносно однієї з них передбачається, що:

6) заробітна плата s у моделі вважається заданою.

Вона визначається в результаті компромісу між працедавцями та найманими працівниками (реальна ж зарплата залежить також і від рівня цін).

Очевидно, для побудови замкнутої моделі необхідний подальший розгляд ринку продукту і ринку фінансів. Вироблений продукт частково витрачається на споживання, а частково зберігається:

$$Y = S + \omega,$$

де ω — *споживана частина* (в економіку не повертається), а S — частина, що зберігається та повертається в економічну систему (або фондостворюваний продукт).

Співвідношення між величинами S і ω визначається із наступних міркувань. Відносно величини ω вважається, що:

7) споживана частина випуску залежить від величини самого випуску, тобто $\omega = \omega(Y)$.

При цьому функція $\omega(Y)$ має властивість «насичення» також як і функція $F(R)$: чим більше випуск, тим менша частка додаткового випуску ΔY витрачається на споживання і тим більша частка зберігається. Величина $d\omega / dY = c(Y)$ називається *схильністю до споживання* і лежить у межах $0 < c < 1$, інакше при малих випусках споживалося б продукту більше, ніж вироблялося (величина $d = 1 - c$ — схильність до накопичення).

Фондостворюваний продукт

$$S = Y - \omega(Y) \tag{4.11}$$

вкладається інвесторами в економіку з метою отримати в майбутньому з цих інвестицій дохід. У моделі вважається, що інвестиції еквівалентні відкладеному (віднесеному на майбутнє) споживанню і тому визначаються ще одним фінансовим макропоказником системи — *нормою банківського відсотку* r. Дійсно, зробивши *інвестиції* в розмірі A і отримавши через рік дохід $D = Ar$, інвестор нічого не втрачає (у даному прикладі і не виграє) у порівнянні з внеском цих коштів до банку під відсотки r. В обох випадках сьогоднішнє споживання відкладається заради можливості більшого споживання у наступному році. Попит на інвестиції задається функцією $A(r)$ такою, що $A'(r) < 0$ при $0 < r < r_1$ та $A(r) = 0$ при $r \geq r_1$: при великій нормі відсотку інвестиції відсутні.

В умовах рівноваги пропозиція фондостворюваного продукту $S(Y)$ збалансована з попитом на інвестиції $A(r)$:

$$S(Y) = A(r)$$

або, враховуючи (4.11),

$$Y - \omega(Y) = A(r). \tag{4.12}$$

Для фінального замикання моделі розглядаєтьтся ринок фінансів. Гроші потрібні економічним агентам для купівлі фондостворюваного продукту, для споживання, а також як один із засобів накопичення. Вважається, що гроші випускає держава, і їх кількість (*пропозиція)* Z є заданим керуючим параметром системи. Відносно попиту на гроші робиться таке припущення:

8) попит на гроші являє собою суму операційного й спекулятивного попиту.

Операційний попит визначається кількістю грошей, які треба мати на руках, щоб робити закупівлю товара Y (як фондостворюваного, так і того, що йде на споживання). Якщо ціна продукту дорівнює p, а *час обороту* — τ, то операційний попит дорівнює, очевидно, величині τpY.

Спекулятивний попит зв'язаний з величиною норми відсотку r. Якщо норма відсотку висока, то більшу частину грошів їх власники переважно зберігають у банку, розраховуючи на добрий дохід і жертвуючи більш високою степеню ліквідності банкнот (здатністю обмінюватись на продукти) у порівнянні з банковськими зобов'язаннями. При низькій відсотковій ставці спекулятивний попит збільшується: власники бажають мати на руках все більше банкнот, акумулюючи в них свої накопичення. Тому спекулятивний попит задається функцією

$I(r)$ такою, що $I'(r)<0$ при $r>r_2$ і $I(r)$ різко зростає при $r \to r_2$ ($\underbrace{\lim}_{r \to r_2} I(r) \to \infty$; власники грошей не беруть зобов'язань банку). Природно вважати $r_2 < r_1$, тому що в протилежному разі або інвестиції дорівнюють нулю, і говорити про економічну рівновагу не доводиться, або функція $I(r)$ не визначена, і розгляд не має сенсу.

Оскільки фінансовий ринок знаходиться в рівновазі, то баланс («закон збереження») грошей у системі виражається рівнянням

$$Z = \tau pY + I(r). \tag{4.13}$$

Зводячи воєдино рівняння (4.9), (4.10), (4.12), (4.13), приходимо до *математичної моделі ринкової рівноваги,* що отримана у припущеннях 1)-8):

$$Y = F(R), \;\; F'(R) = \frac{s}{p}, \quad Y - \omega(Y) = A(r), \qquad Z = \tau pY + I(r). \tag{4.14}$$

У моделі (4.14) задаються параметри системи s (ставка заробітної плати), Z (пропозиція грошей) і технічний параметр τ. Функції F, F', ω, A, I — відомі функції своїх аргументів з описаними вище властивостями. За цими вхідними даними з моделі визначаються чотири невідомих величини: *Y* (випуск продукту), *R* (зайнятість), *p* (ціна продукту) і *r* (норма прибутку).

Виключаючи з (4.14) величини р, *r*, *Y*, рівняння (4.14) легко звести до одного рівняння відносно *R*:

$$-\frac{\tau sF(R)}{F'(R)} + Z = I\left\{A^{-1}\left[F(R) - \omega\left(F(R)\right)\right]\right\} \tag{4.15}$$

де A^{-1} — функція, яка зворотня до функції *A*. Знайшовши із (4.15) значення *R*, із (4.14) неважко визначити всі інші шукані величини.

Доведемо за допомогою нестрогих, але зато простих побудов існування розв'язку (4.15), засновуючись на аналізі функцій, що входять в його ліву й праву частини.

Функція $F(R) - \omega(F(R))$ — монотонно зростаюча функція *R*, що дорівнює нулю при *R* = 0. Її монотонність випливає з умови $d\omega(F(R))/d(F(R)) = c < 1$, а зростання в міру збільшення R — з умови $dF(R)/dR > 0$. Ця функція є аргументом для монотонної функції A^{-1}, із властивостей функції A легко встановити якісний вигляд залежності A^{-1} від R, причому $A^{-1} \equiv 0$ при $R > R_1$ (R_1 — деяке значення величини R, $0 < R_1 < \infty$). У свою чергу, A^{-1} є аргументом монотонної функції I, властивості котрої такі, що як функція R вона монотонно збільшується, але для значень $R > R_2$ функція I не визначена. Розглянемо тепер ліву частину рівняння (4.15). Функція —$\tau s F(R)/F'(R)$ дорівнює нулю при $R = 0$ (вважається, що $F'(0) \neq 0$). Її перша похідна за R, як виходить з властивостей функцій $F'(R) > 0,\ F''(R) < 0$, негативна, тобто вона монотонно зменшується.

Розміщуючи графіки лівої (крива *2)* і правої (крива *1)* частин рівняння (4.15) на одному рис. 3.1, засвідчуємось у тому, що при достатньо великому значенні керуючого параметра Z криві пересікаються в деякій точці R_0, $0 < R_0 < \infty$. Точка пересікання єдина через монотонність графіків. Отже, модель (4.14) дійсно має єдиний розв'язок, що описує рівноважний стан економіки. Але значення моделі цим не обмежується. Вона може бути використана для порівнювального аналізу різних, але близьких станів рівноваги (не відповідаючи, природно, на запитання, яким чином система приходить у рівноважний стан або виходить з нього). Припустимо, що значення рівноважних параметрів s_0 та Z_0 змінилися на малі величини δs_0 і δZ_0 при переході з одного рівноважного стану в інший (параметр τ вважаємо незмінним). Тоді зміняться і всі інші характеристики системи. Їх можна знайти з (4.14), маючи на увазі, що обидва порівнюваних стани рівноважні. Наприклад, з другого рівняння (4.14), застосовуючи розклад у ряд Тейлора, отримуємо

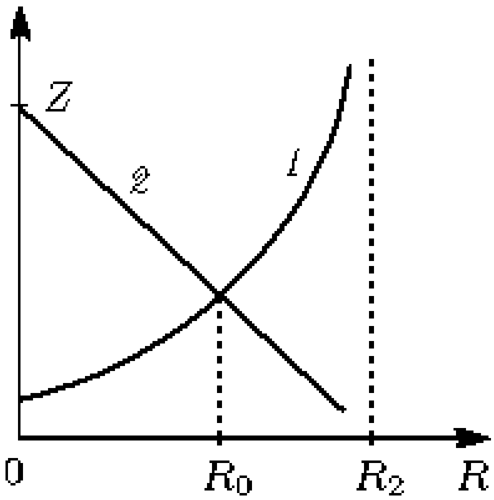


Рис.4.1.

$$\frac{s_0}{p_0}\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta s_0}{p_0} - F''(R_0)\delta R$$

Проводячи аналогічну процедуру з іншими рівняннями системи (4.14) і зводячи результати докупи, отримуємо

$$\frac{\delta p}{p_0} = a_1(\delta A + \delta\omega) + a_2(\delta Z - \delta I) + a_3\delta s - a_4\delta Y \; . \qquad (4.16)$$

У виразі (4.16) присутні всі характеристики виучуваної системи (коефіцієнти $a_i < 0, \quad i = 1,\dots,4$, визначаються рівноважними значеннями величин s_0, p_0, Y_0, r_0, функцій R, ω, A, I та їх похідних). Тому з його допомогою можна аналізувати весь комплекс змін, що відбуваються при переході від одного рівноважного стану до іншого (так званий *системний підхід).* Нехай, наприклад, при незмінній кількості зайнятих (тобто $\delta R = 0, \delta Y = 0$), незмінних зарплаті ($\delta s = 0$) та рівні споживання ($\delta\omega = 0$) треба знизити ціну ($\delta p < 0$), тобто збільшити реальну заробітну плату працюючих. Тоді треба прагнути зменшити інвестиції *(* $\delta A < 0$), знизити загальний обсяг грошей ($\delta Z < 0$) та збільшити спекулятивний попит на них ($\delta I > 0$). Зазначимо, що вимоги, які випливають із аналізу співвідношення (4.16), можуть бути, взагалі кажучи, суперечливими.

Зрозуміло, ця та інші системи заходів, що можуть випливати з побудованої моделі, не реалізуються автоматично шляхом відповідної варіації параметра Z або s (чи обох параметрів). Модель (4.14) тільки указує на необхідні зміни у поведінці економічних агентів. Питання про те, як дійсно забезпечити ці зміни, переконавши учасників ринкового процесу прийняти їх, виходить за межі розглядуваної моделі. Його розв’язання пов’язано з вивченням ще більш важко формалізованих об’єктів. При дослідженні подібних об’єктів широко застосовують підходи, що почерпнуті з природонаукової сфери, такі як ідея насичення, переходи з мікро- на макрорівень, застосування «законів збереження», уявлення про стаціонарність та рівноважність і т. п.

4.3. Макромодель економічного зростання. У зростаючій економіці кількість працюючих $R(t)$ нестала, а збільшується протягом часу. У найпростішій моделі вважається, що темп приросту зайнятих працівників пропорційний кількості уже працюючих:

$$\frac{dR}{dt} = \alpha R(t)$$

тому $R(t) = R_0 \exp(\alpha t)$ — заздалегідь відома функція часу (величина α задається,

$R = R_0$ — кількість працюючих у початковий момент часу t = 0). Працівники створюють національний дохід $Y(t)$, котрий частково йде на споживання і частково на накопичення:

$$Y(t) = \omega + A. \tag{4.17}$$

Накопичена частина продукту A повертається в економіку з тим, щоб компенсувати виробничі потужності, що вибувають зі вжитку, а також для утворення нових потужностей. Під *потужністю* $M(t)$ розуміють максимально можливий випуск продукту економікою. Реальний випуск продукту залежить, природно, від кількості працюючих і задається виробничою функцією вигляду

$$Y(t) = M(t) \cdot f(x(t)). \tag{4.18}$$

У формулі (4.18) величина $x(t) = R(t)/M(t)$ за своїм змістом — кількість працюючих на одиницю потужності. Відносно функції $f(x)$ робиться наступне припущення: $f(0) = 0,\ f' > 0$ (випуск зростає зі збільшенням кількості зайнятих) та $f'' < 0$ (насичення). Функція $f(x)$ визначена для значень на відрізку $0 \le x \le x_M$, де $x_M = R_M / M$, а $R_M(t)$ — кількість робочих місць у господарстві при потужності $M(t)$. Якщо всі місця заповнені, то випуск $Y(t)$ дорівнює $M(t)$, тобто для $f(x)$ повинна виконуватися умова $f(x_M) = 1$.

Одне з головних завдань *теорії економічного зростання* — знаходження оптимальних у деякому сенсі способів розділення виробленого продукту на споживану й накопичувану частини. Критерієм оптимальності можна вибрати, наприклад, душове споживання (кількість продукту, що споживається одним працюючим), тобто величину $c(t) = \omega / R(t)$.

Збережений в одиницю часу продукт $A(t)$ витрачається на утворення *нової потужності:*

$$A(t) = \alpha I(t),$$

де $\alpha > 0$ — кількість фондостворюваного продукту, яка вважається заданою і сталою, що необхідна для створення одиниці нової потужності, $I(t)$ — кількість одиниць нової потужності.

Темп вибування існуючої потужності припускається пропорційним величині самої потужності, тобто величині $\beta M(t)$, коефіцієнт вибування $\beta > 0$ задається сталим.

У результаті для зміни функції $M(t)$ отримуємо балансне співвідношення

$$\frac{dM(t)}{dt} = I(t) - \beta M(t). \tag{4.19}$$

Рівняння (4.17)-(4.19) включають чотири невідомих величини — $Y(t), \omega(t), M(t), I(t)$. Для замикання моделі припустимо, що швидкість введення нової потужності пропорційна величині вже існуючої: $I(t) = \gamma M(t)$, де $\gamma > 0$ (величина, яка зворотна характерному часу нарощування потужності) вважається заданою і сталою (природно, $\gamma > \beta$). Тоді розв'язок рівняння (4.19) легко знаходиться:

$$M(t) = M_0 e^{(\gamma - \beta)t}.$$

А разом з ним визначаються і всі інші невідомі величини. Проаналізуємо простий, але наочний випадок економічного зростання, коли потужність збільшується з часом у тому ж темпі, що й кількість працюючих. Для цього, очевидно, необхідно, щоб виконувалося рівняння

$$\gamma - \beta = \alpha$$

Воно означає також, що з тим же темпом зростають функції $Y(t)$ (оскільки $f(x(t)) = f(x = R_0 / M_0) = const$) та $\omega(t), I(t)$.

Знайдемо кількість працюючих та співвідношення між споживанням та накопиченням, при яких душове споживання працівників максимальне:

$$c(t) = \frac{\omega(t)}{R(t)} = \frac{Y(t) - A(t)}{R(t)}$$

Враховуючи, що $Y(t) = M(t) f(x)$, $A(t) = \alpha\gamma M(t)$, і беручи до уваги останні два рівняння, отримуємо

$$c(t) = c = \frac{f(x) - \alpha(\alpha + \beta)}{x},$$

тобто душове споживання з часом не змінюється. Його максимум, як очевидно із наведеного рівняння, досягається за умови

$$\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x) - \alpha(\alpha+\beta)}{x}\right) = 0,$$

котра дає рівняння для шуканої величини x_m

$$x_m f'(x_m) - f(x_m) + \alpha(\alpha+\beta) = 0.$$

Це рівняння завжди має єдиний розв’язок $0 \le x_m \le x_M$. Зазначимо, що окрім всіх зроблених припущень, для реалізації розглядуваного режиму економічного зростання необхідно узгодження чисельності працюючих R_0 з потужністю $M(t=0) = M_0$ у початковий момент часу, так щоб $R_0 / M_0 = x_m$.

Норма накопичення, що забезпечує максимальне значення c_m,

$$n_m = \frac{A_m}{Y_m},$$

знаходиться з рівнянь $Y_m = M_m f(x_m),\ \ A_m = \alpha\gamma M_m,\ \ x_m f'(x_m) - f(x_m) + \alpha(\alpha+\beta) = 0$ та $\gamma - \beta = \alpha$:

$$n_m = 1 - \frac{f'(x_m)}{f(x_m)} x_m, \tag{4.20}$$

і називається *нормою золотого правила зростання Солоу*.

Якщо умова $\gamma - \beta = \alpha$ не виконана, то режими зростання економіки стають більш складними, і оптимізація їх характеристик проводиться на всьому розглядуваному часовому проміжку. Нагадаємо, що побудована модель і подібній до неї моделі не враховують змін у виробничих відношеннях (вони вважаються сталими) і оперують в основному технологічними зв’язками, даючи, зокрема, верхні технологічні обмеження на темп економічного зростання. При їх одержанні також широко використовують аналогії з природничонауковими об’єктами.

Вправи

1. Перевірте, використовуючи формули (4.4), (4.5), (4.6), за допомогою рівняння (4.7), що для розв’язання (4.8) виконані властивість $x_{nm} = -x_{mn}$, умова 2) і критерій оптимальності $X' = S$.

3.Вираз $\Delta Y = \Delta A/(1-c)$, де ΔA — зміни у рівні інвестування, а ΔY — відповідний приріст (спад) випуску продукту, називається *співвідношенням мультиплікатора Кейнса*. Отримайте його з моделі (4.14).

4. Отримайте вирази для коефіцієнтів a_i, $i = 1,...,4$, у (4.16) і пересвідчитесь в тому, що всі вони позитивні.

5. Доведіть, використовуючи властивості функції $f(x)$, існування єдиного розв'язання рівняння (4.19).

6. Використовуючи міркування, що використовувались при виводі (4.20), покажіть, що для величини максимального душового споживання c_m слушне рівняння $c_m = f'(x_m)$ (величина $f'(x_m)$ називається *граничною продуктивністю праці* — це приріст випуску продукту при збільшенні зайнятості на одиницю).

7. Покажіть, що коли весь вироблений продукт йде на накопичення і потужності завантажені повністю, то економічне зростання реалізується з темпом $Y(t) = Y_0 t e^{\gamma_m t}$, де $\gamma_m = 1/\alpha - \beta$.

4.4. Деякі моделі суперництва

Побудуємо моделі різних видів суперництва — двовидової боротьби в популяціях, гонки озброєнь, бойових дій. Покажемо спільність методологічних підходів, що застосовуються при отриманні й аналізі цих моделей.

1. Взаємовідносини в системі „хижак-жертва”. Строго кажучи, ці відношення (як і відношення в аналогічній системі „паразит-хазяїн”) не можуть називатися суперництвом. «Суперництво» жертви з хижаком виражається у зміні чисельності жертви, котра, у свою чергу, позначається на чисельності хижака. Справді, ніякий організм (тим більш популяція) не живе ізольовано, а взаємодіє зі своїм оточенням. Широко розповсюджений вид взаємодії — використання одними живими організмами (тваринами, птахами, рибами, комахами) інших організмів у якості їжі.

Математична модель найбільш простої, тобто двохвидової системи „хижак-жертва” засновується на таких припущеннях:

1)чисельності популяцій жертв N і хижаків M залежать лише від часу (точкова модель, що не враховує просторовий розподіл популяції на зайнятій території; пор. з моделлю угруповання амеб);

2)при відсутності взаємодії чисельність видів змінюється за моделлю Мальтуса (див. п.1); при цьому кількість жертв збільшується, а кількість хижаків падає, тому що в цьому випадку нічим харчуватися:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \quad \frac{dM}{dt} = -\beta M, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0\,;$$

3)природна смертність жертви та природна народжуваність хижака вважаються несуттєвими;

4)ефект насичення чисельності обох популяцій не враховується;

5)швидкість зростання чисельності жертви зменшується пропорційно чисельності хижаків, тобто величині $cM, \; c > 0$, а темп зростання хижаків збільшується пропорційно чисельності жертви, тобто $dN, \; d > 0$.

Об'єднуючи припущення 1)-5), приходимо до системи *рівнянь Лотки—Вольтера*

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= (\alpha - cM)N, \\ \frac{dM}{dt} &= (-\beta + dN)M, \end{aligned} \tag{4.21}$$

з якої по початкових чисельностях $N(0) = N(t=0), M(0) = M(t=0)$ визначається чисельність популяцій в довільний момент часу $t > 0$. Нелінійну систему (4.21) зручно досліджувати в площині змінних N, M, для чого перше рівняння поділимо на друге:

$$\frac{dN}{dM} = \frac{(\alpha - cM)N}{(-\beta + dN)M}. \tag{4.22}$$

Рівняння (4.21), (4.22) мають положення рівноваги (або стаціонарний розв'язок, який не залежить від часу)

$$M_0 = \frac{\alpha}{c}, \quad N_0 = \frac{\beta}{d}. \tag{4.23}$$

Замислимось над питанням про стійкість положення рівноваги (4.23). Під цим розуміється наступне. Якщо початкові чисельності в точності дорівнюють величинам (4.23), то як протягом часу вони змінюються? Якщо з якихось причин чисельності не набагато відхиляються від величин $N_0, \ M_0$, то чи повернеться система у положення рівноваги? Нарешті, якщо початкові значення $N(0), \ M(0)$ помітно відрізняються від рівноважних, то яким чином вони змінюються з часом відносно величин $N_0, \ M_0$?

Щоб зрозуміти часову динаміку функцій $N(t), \ M(t)$, перетворимо рівняння (4.22) до вигляду

$$dN(-\beta + dN)M = (\alpha - cM)NdM,$$

Поділимо обидві частини одержаного рівня на добуток $N \cdot M$ і перенесемо усі члени в ліву частину:

$$\frac{dN}{N}\beta - d \cdot dN - \alpha\frac{dM}{M} + cdM = 0, \tag{4.24}$$

Рівняння (4.24) неважко проінтегрувати та отримати співвідношення

$$\beta \ln N - d \cdot N + \alpha \ln M - c \cdot M = const,$$

де константа у правій частині визначається по початковим значенням $N(0), \ M(0)$. Іншими словами, рівняння (4.22), або, що те саме, система (4.21) має інтеграл вигляду

$$N^{\beta} \cdot \exp(-d \cdot N) = C_1 M^{-\alpha} \exp(c \cdot M) = const, C_1 > 0 \tag{4.25}$$

Існування інтеграла (4.25) дає можливість відповісти на поставлені запитання:

а) якщо $N(0) = N_0, \ M(0) = M_0$, то у всі моменти часу численність популяцій не змінюється;

б) при маленькому відхиленні від положення рівноваги чисельності як хижака, так і жертви протягом часу не повертаються до рівноважних значень (при цьому із моделі (4.21) отримуємо стандартне рівняння коливань);

в) якщо відхилення від положення рівноваги велике, то поведінка функцій $N(t), \ M(t)$ така ж, як і у випадку б).

Ці висновки означають, що чисельності популяцій жертви і хижака здійснюють періодичні коливання навколо положення рівноваги. Амплітуда коливань та їх період визначаються початковими значеннями чисельностей $N(0),\ M(0)$, вони здійснюються у протифазі: максимальному значенню $N(t)$ відповідає мінімальне значення $M(t)$, та навпаки. Коливання, суть яких повністю зрозуміла (вони реально спостерігаються у природі) означають виникнення у двовидових популяційних системах значно більш складних процесів, ніж в одновидових системах (порів. з моделлю Мальтуса і логістичною моделлю у р. 1).

Більш точні математичні описи двовидових взаємодій враховують нерівномірність розподілу чисельності популяцій на зайнятій території (їм відповідають системи рівнянь у часткових похідних), часове запізнення між народженням осіб та їх зрілістю і т.п. Виникають набагато складніші картини взаємодії як за часом, так і у просторі. Наприклад, при врахуванні насичення для популяції жертв у першому рівнянні (4.21) з'являється відповідний логістичний член, і воно набуває вигляду

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - cM - \alpha N)N. \tag{4.26}$$

У цьому випадку фазові траєкторії мають вигляд спіралей, що сходяться протягом часу до положення рівноваги, а амплітуда коливань зменшується протягом часу.

2. Гонка озброєнь між двома державами. Припускається, що загальна кількість озброєнь у кожної держави змінюється з часом залежно від трьох факторів: кількості озброєння у противника, зносу вже існуючого озброєння та степені недовіри між противниками. Темпи приросту та зменшення озброєнь пропорційні вказаним факторам, тобто

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= \alpha_1(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_1(t), \\ \frac{dM_2}{dt} &= \alpha_2(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_2(t), \end{aligned} \tag{4.27}$$

У рівняннях (4.27) $M_1(t) \geq 0,\ M_2(t) \geq 0$ — обсяги озброєнь, коефіцієнти $\alpha_1(t) > 0,\ \alpha_2(t) > 0,\ \beta_1(t) > 0,\ \beta_2(t) > 0$ характеризують швидкості «старіння» озброєнь (аналог процесу амортизації виробничих потужностей у моделях економіки), функції $\gamma_1(t) \ge 0,\ \ \gamma_2(t) \ge 0$ описують рівень взаємної настороженості (недовіри) конкурентів, що вважається не залежним від кількості озброєнь, а визначається іншими причинами.

Модель (4.27) не враховує багатьох важливих факторів, що впливають на динаміку гонки озброєнь, але, тим не менш, дає змогу проаналізувати ряд суттєвих властивостей цього процесу. Аналіз найбільш простий у частковому випадку, коли функції $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i$ не залежать від часу:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= \alpha_1 M_2 - \beta_1 M_1 + \gamma_1, \\ \frac{dM_2}{dt} &= \alpha_2 M_1 - \beta_2 M_2 + \gamma_2, \end{aligned} \qquad (4.28)$$

Дослідимо систему (4.28) у площині $M_1,\ M_2$ з метою визначити якісну поведінку функцій $M_1(t),\ M_2(t)$ з часом. Рівняння (4.28) мають положення рівноваги $dM_1/dt = 0,\ \ dM_2/dt = 0$. Рівноважні значення $M_1{}^0,\ M_2{}^0$ знаходяться з умов

$$\alpha_1 M_2{}^0 - \beta_1 M_1{}^0 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 M_1{}^0 - \beta_2 M_2{}^0 + \gamma_2 = 0$$

і дорівнюють

$$M_1{}^0 = \frac{\alpha_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1}{\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2},\ M_2{}^0 = \frac{\alpha_2\gamma_1 + \beta_1\gamma_2}{\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2}. \qquad (4.29)$$

Із (4.29) випливає перший важливий висновок: для того щоб рівновага існувала при позитивних значеннх величин $M_1{}^0,\ M_2{}^0$ (за своїм сенсом функції $M_1(t),\ M_2(t)$ невід'ємні), повинна виконуватись нерівність

$$\beta_1\beta_2 > \alpha_1\alpha_2. \qquad (4.30)$$

Зміст умови (4.30) пояснюється з наступних міркувань. Нехай, наприклад, параметри α_1, β_1 та β_2 незмінні, а параметр α_2 збільшується. Це означає, що перша держава не змінює свою стратегію в області озброєнь, а друга нарощує озброєння при незмінному темпі зносу зброї параметр β_2). Тоді при досить великій величині α_2 рівновага стане завідомо неможливою, а нерівність (4.30) обов'язково порушиться. Замітимо, що, коли обидва параметри γ_1, γ_2, що характеризують взаємну недовіру, дорівнюють нулю, то положенню рівноваги відповідає відсутність озброєнь в обох сторін. Вивчимо тепер питання про стабільність рівноваги (4.29) за умови (4.30). У цьому разі інтегральні криві рівняння (4.28) у площині $M_1,\ M_2$ мають вигляд, показаний на рис. 4.2. Штрихові прямі відповідають ізоклінам нуля і нескінченності $(M_2 = \beta_1 / \alpha_1 M_1 - \gamma_1 / \beta_1)$. Ізокліна нуля має нахил менший, ніж ізокліна нескінченності (це випливає із нерівності (4.30)). Суцільним лініям відповідають інтегральні криві. Стрілками показано напрямок руху за інтегральними кривими протягом часу. Функції $M_1(t),\ M_2(t)$ при зростанні t наближаються до рівноважних значень. Таким чином, рівновага стабільна: будь-яке відхилення від неї стає вкрай малим протягом досить великого проміжку часу.

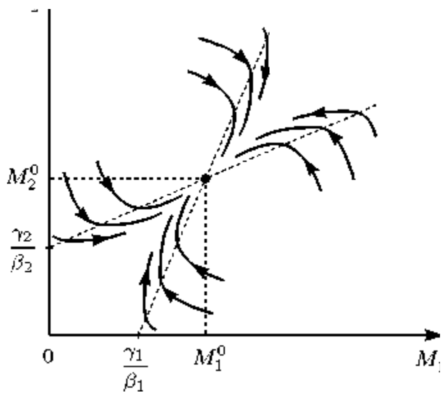


Рис. 4.2.

Із побудованої моделі неважко визначити деякі характеристики можливої поведінки суперників при переході від одного положення рівноваги до іншого. Нехай, наприклад, темп нарощування озброєнь у першій і другій державах змінюється на невелику величину $d\alpha$ $(d\alpha = d\alpha_1 = d\alpha_2)$. При цьому обсяг озброєнь також змінюється, причому обидві сторони бажають, щоб прирощення $dM_1{}^0,\ dM_2{}^0$ були однаковими й інтереси обох боків не ущімлювались. Для величин $dM_1{}^0,\ dM_2{}^0$ із (4.29) отримуємо

$$dM_1{}^0 = \frac{\alpha_1\alpha_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\gamma_1 + \alpha_1^2\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1}{(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)^2} d\alpha,$$

$$dM_2{}^0 = \frac{\alpha_1\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_2^2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_2}{(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)^2} d\alpha.$$

Припустимо для простоти, що настороження (недовіри) партнерів рівні ($\gamma_1 = \gamma_2$). Тоді з рівняння $dM_1{}^0 = dM_2{}^0$ отримуємо умову паритету сторін при невеликій зміні рівноваги

$$\alpha_1(\alpha_1+\beta_2-\beta_1)=\alpha_2(\alpha_2+\beta_1-\beta_2),$$

котре можна покласти в основу відповідних домовленостей між державами, якщо відомі величини $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$. Так, нехай $\alpha_2=\sigma\alpha_1,\ \sigma>0$. У цьому випадку з попереднього рівняння отримуємо

$$\alpha_1(1-\sigma)=\beta_1-\beta_2. \qquad (4.31)$$

При $\sigma<1$ (темп приросту озброєнь у другої сторони менше, ніж у першої) для збереження паритету необхідно $\beta_2<\beta_1$, тобто у другої держави (у відповідності до формули (4.31)) темп амортизації озброєнь повинен бути меншим. При протилежній нерівності $\sigma>1$ маємо, природно, зворотне співвідношення між швидкостями амортизації.

4.5. Числові методи алгебри і аналізу

Методи розв'язання нелінійних рівнянь. Методи відділення і уточнення коренів, геометричний зміст, збіжність, похибка методів: половинного ділення, Ньютона, простих ітерацій.

4.5.1. Числові методи розв'язання нелінійних і трансцендентних рівнянь.

Розглянемо рівняння

$$f(x)=0 \qquad (4.32)$$

Для знаходження коренів рівняння розрізняють два етапи.

1)відділення коренів, тобто знаходження таких інтервалів за аргументом x, у кожному з яких існує тільки один корінь рівняння;

2) уточнення коренів полягає в застосуванні деякого ітераційного методу, внаслідок котрого корінь рівняння може бути отриманий з довільною наперед заданою точністю ε. При цьому, зупиняючи процес на якійсь кінцевій ітерації, необхідно оцінити похибку в порівнянні з точним коренем, котрий є невідо-мим.

4.5.1.1. Способи відділення коренів.

Найбільш уживаними на практиці способами відділення коренів є наступні.

1)графічний,

2) метод половинного ділення.

У графічному способі будують графік функції *f(x)* та наближено визначаються її нулі (або корні рівняння $f(x)=0$). Вміщуючи ці нулі в інтервали $\xi_i \in (\alpha_i, \beta_i)$, на межах яких виконуються умови $f(\alpha_i)\cdot f(\beta_i)<0$, і знаки похідних першого й другого порядків на інтервалах (α_i, β_i) сталі, можна стверджувати, що в кожному з цих інтервалів знаходиться один корінь рівняння.

У методі половинного ділення область визначення функції $f(x)$: $x \in (\alpha, \beta)$ ділять на 2, 4, 8, 16, 32, . . . інтервали і для кожного з них аналізують знаки функції на кінцях інтервалу; якщо вони протилежні, то в інтервалі знаходиться не менше одного кореня; якщо ж знак першої похідної на інтервалі сталий, то (при виконанні попередньої умови) в інтервалі знаходиться точно один корінь.

4.5.1.1.2. Способи уточнення коренів

4.5.1.1.2.1. Метод половинного ділення

Нехай $f(x)=0$ і точне значення кореня $\xi \in (a,b)$.

У методі половинного ділення функція $f(x)$, $x \in [a,b]$, повинна задовільняти таким двом умовам:

а) $f(a)\cdot f(b) < 0$;

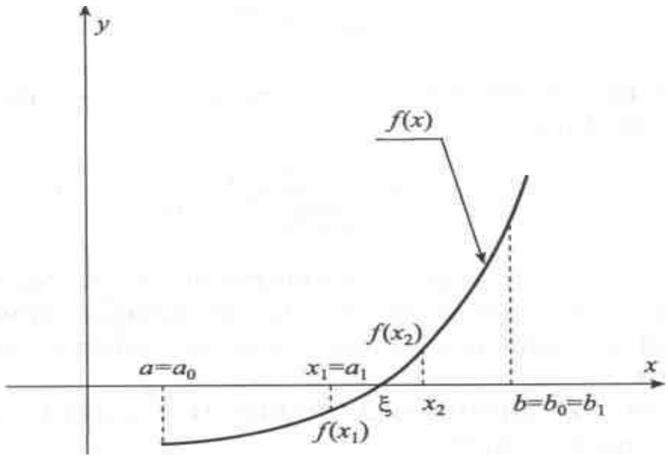
б) $f(x)$ неперервна на відрізку $x \in [a,b]$.

Метод половинного ділення полягає в побудові послідовності вкладених відрізків $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}] \subset ... \subset [a_0, b_0] \equiv [a,b]$, на кінцях яких задовільняється умова $f(a_k)\cdot f(b_k) < 0$, $k = 0,1,2,...$ (див. рис. 4.3).

Опишемо один крок ітераційного метода половинного ділення. Нехай на $(k-1)$- ому кроці знайдено відрізок $[a_{k-1}, b_{k-1}] \subset [a,b]$, на якому виконано умову $f(a_{k-1})\cdot f(b_{k-1}) < 0$. Цей відрізок ділиться навпіл точкою $x_k = (a_{k-1}+b_{k-1})/2$, та обчислюємо $f(x_k)$. Якщо $f(x_k) = 0$, то $x_k = (a_{k-1}+b_{k-1})/2$ — корінь рівняння (2.2.1). Якщо $f(x_k) \neq 0$, то з двох половин відрізка вибирається та, на кінцях котрої функція має протилежні знаки, тому що корінь знаходиться якраз у цій половині. Таким чином, $a_k = a_{k-1}$, $b_k = x_k$, якщо $f(a_{k-1})\cdot f(x_k) < 0$; $a_k = x_k$, $b_k = b_{k-1}$, якщо $f(x_k)\cdot f(b_{k-1})$ < 0.

Якщо необхідно знайти корінь з точністю ε, то ділення навпіл продовжується до тих пір, поки не виконається умова

$$b_k - a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k (b-a) \le \varepsilon . \tag{4.33}$$



Тоді величина $\xi = (a_k + b_k)/2$ наближено визначає корінь з точністю ε.

З (4.33) можна оцінити кількість κ ітерацій, яка потрібна для досягнення заданої точності ε: $k \ge \log_2((b-a/\varepsilon))$. Звідси видно, що для отримання трьох вірних знаків (ε =10^{-3}) потрібно зробити ~ 10 ітерацій.

Рис. 4.3. - До методу половинного ділення

Покажемо, що процес ітерацій за методом половинного ділення сходиться до кореня рівняння (4.32). Для цього на підставі (4.33) запишемо похибку, яку отримаємо при зупинці ітераційного процесу на k-й ітерації:

$$\xi - x_k = 2^{-k}(b-a). \tag{4.34}$$

Нехай $f(a_k)\cdot f(b_k)$ < 0. З (4.34) видно, що $\underbrace{\lim}_{k\to\infty}(\xi - x_k) = \underbrace{\lim}_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}(b-a) = 0$, звідки виходить, що $\underbrace{\lim}_{k\to\infty}(x_k) = \xi$, де ξ - точний корінь.

Візьмемо границю від добутку $f(a_k)\cdot f(b_k)$ при $k\to\infty$. Оскільки функція *f(x)* неперервна на $x\in[a,b]$ за умовами задачі, то знак границі можна внести під знак функції, тобто

$$\underbrace{\lim}_{k\to\infty} f(a_k)\cdot f(b_k) = f(\underbrace{\lim}_{k\to\infty} a_k)\cdot f(\underbrace{\lim}_{k\to\infty} b_k) = f(\xi)\cdot f(\xi) < 0,$$

що неможливо і, таким чином, $f^2(\xi) = 0$, або $f(\xi) = 0$, тобто ξ є єдиним коренем рівняння (4.32).

Переваги:

а) метод половинного ділення дуже простий в алгоритмізації і програмуванні;

б) на функцію $f(x)$ не накладається ніяких обмежень, крім вимоги про неперервність.

Недолік: метод дуже повільно сходиться, тобто необхідно використовувати велику кількість ітерацій для досягнення заданої точності ε.

4.5.1.1.2.2. Метод Ньютона (дотичних) уточнення коренів

Нехай для рівняння (4.32) на интервалі $x \in (a,b)$ виділено корінь ξ.

У методі Ньютона функція *f(x)* повинна задовольняти на відрізку $x \in [a,b]$ наступним умовам:

1) існування похідних 1-го і 2-го порядків;

2) $f'(x) \neq 0$;

3) похідні 1-го і 2-го порядків знакосталі ($sign\{f'(x), f''(x)\} = const$) на відрізку $x \in [a,b]$.

Нехай маємо значення кореня на k- й ітерації — x_k. Тоді значення кореня на $(k+1)$- й ітерації обчислюємо таким чином:

$$x_{k+1} = x_k + h_k, \qquad (4.35)$$

де h_k — крок, що підлягає визначенню.

Щоб визначити h_k, підставимо x_{k+1} у функцію $f(x)$ і розкладемо її у ряд Тейлора до другого доданку включно в околиці точки x_k, отримаємо

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot h_k .$$

Знайдемо величину кроку, виходячи з умови, що $f(x_{k+1}) = 0$, тобто що x_{k+1} є коренем рівняння (4.32). Тоді величина кроку буде

$$h_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} .$$

Підставляючи знайдене у (4.35) отримуємо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0,1,2,.........$$

За початкове наближення x_0 приймаємо один з кінців відрізку, а саме:

$$x_0 = \begin{cases} a, \ \textit{якщо} \quad f(a) \cdot f''(a) > 0; \\ b, \ \textit{якщо} \quad f(b) \cdot f''(b) > 0 \end{cases}.$$

4.5.1.1.2.3. Метод простих ітерацій уточнення коренів

Метод простих ітерацій уточнення коренів рівняння (4.32) полягає у заміні цього рівняння еквівалентним йому рівнянням

$$x = \varphi(x), \ x \in [a,b], \tag{4.36}$$

й побудові послідовності

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0,1,2,........ \tag{4.37}$$

де $x_0 \in [a,b]$, наприклад $x_0 = (a+b)/2$.Якщо не вдається виразити x з рівняння (4.32), то еквівалентне рівняння та еквівалентну функцію можно побудувати, наприклад, так: $x = x + f(x)$, $\varphi(x) = x + f(x)$.

Послідовність (4.37) називають *методом простих ітерацій* уточнення коренів рівняння (4.32).

ВПРАВИ

Числові методи розв'язання нелінійних та трансцендентних рівнянь.

1.Методом половинного ділення уточнити найбільший корінь наступних рівнянь з точністю до $\varepsilon = 10^{-2}$:

1) $x^2 - e^{-x} = 0$; 2) $0{,}5x^2 - e^{-x} = 0$; 3) $5x^2 - e^{-5x} = 0$; 4) $0{,}25x^2 - e^{-x} = 0$; 5) $x^3 - e^{-1{,}5x} = 0$;
6) $\sin(1{,}262x) - 1{,}84x = 0$; 7) $x^4 - e^{-2x} = 0$; 8) $x^3 - e^{-2x} = 0$; 9) $tg(12{,}62x) - 18{,}4x = 0$;
10) $tg(1{,}57x) - 2x = 0$; 11) $0{,}5tg(1{,}262x) - 1{,}84x = 0$; 12) $2\cos(1{,}262x) - 1{,}84x = 0$;
13) $\ln(4{,}6x) = 5{,}2x - 1{,}5$; 14) $tg(2{,}2x) - 3{,}2x = 0$; 15) $0{,}5x - 0{,}4e^{-3x} = 0$; 16) $0{,}5x - 0{,}4e^{-0{,}6x} = 0$;
17) $tg(1{,}9x) - 2{,}8x = 0$; 18) $\ln(3{,}66x) - 4{,}12x = -1{,}5$; 19) $\ln(8x) - 9x + 3 = 0$; 20) $\sin(2{,}2x) - x = 0$;
21) $4{,}66\sin(2{,}86y) - 4x = 0$; 22) $x^4 - e^{-3x} = 0$; 23) $0{,}5tg(3{,}14x) - 1{,}84x = 0$; 24) $\ln(8x) - 9x + 3 = 0$;
25) $2{,}33\sin(2{,}86x) - 2x = 0$; 26) $\exp(-0{,}8x) - 4x = 0$; 27) $0{,}49\exp(-1{,}18x) - x^2 = 0$;
28) $tg(1{,}262x + 0{,}154) - 1{,}84x = 0$; 29) $0{,}4x^2 - e^{-x} = 0$; 30) $0{,}89x^3 - 2{,}8x^2 - 3{,}7x + 11{,}2 = 0$;
31) $0{,}48x^2 - e^{-x} = 0$; 32) $3\cos(1{,}262x) - 1{,}84x = 0$; 33) $0{,}343\exp(-1{,}77x) - x^3 = 0$;
34) $\exp(-1{,}6x) - 16x^2 = 0$; 35) $x^2 - \cos(0{,}5x) = 0$; 36) $1{,}85\sin(1{,}262x + 0{,}308) - 1{,}84x = 0$;
37) $\ln(4{,}6x)^{1/2} = 2{,}6x - 0{,}75$; 38) $tg(2{,}2x) - 3{,}2x = 0$; 39) $5x^2 - 0{,}4e^{-0{,}6x} = 0$;
40) $1{,}4\sin(4{,}8x) - 1{,}125x = 0$; 41) $0{,}89x^3 - 2{,}8x^2 - 3{,}7x + 11{,}2 = 0$; 42) $\ln(3{,}66x) - 4{,}12x + 1{,}5 = 0$.

2. Методом Ньютона уточнити найбільший корінь наступного рівняння з точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$:

1) $tg(1{,}262x) - 1{,}84x = 0$; 2) $2tg(3{,}1462x) - 8{,}04x = 0$; 3) $ctg(4{,}71x) - 1{,}84x = 0$;
4) $2ctg(3{,}1462x) - 8{,}04x = 0$; 5) $\sin(3{,}14x) - 1{,}84x = 0$; 6) $x \quad - e^{-0{,}5x} = 0$; 7) $tg(1{,}262x) - 1{,}84x = 0$;
8) $tg(0{,}62x) - 0{,}92x = 0$; 9) $x^2 - e^{-3x} = 0$; 10) $x^4 - e^{-2x} = 0$; 11) $0{,}45x^2 - e^{-x} = 0$;
12) $0{,}3\,x^2 - e^{-x} = 0$; 13) $tg(2{,}2x) - 3{,}2x = 0$; 14) $\ln(4{,}6x) = 5{,}2x - 1{,}5$; 15) $2{,}8\sin(4{,}71x) - 2{,}25x = 0$;
16) $2{,}8\sin(4{,}8x) - 2{,}25x = 0$; 17) $0{,}25\,tg(1{,}262x) - 0{,}46x = 0$; 18) $tg(1{,}9x) - 2{,}8x = 0$;
19) $\ln(8x) - 9x + 3 = 0$; 20) $\sin(2{,}2x) - x = 0$; 21) $4{,}66\sin(2{,}86y) - 4x = 0$; 22) $x^4 - e^{-3x} = 0$;
23) $0{,}5tg(3{,}14x) - 1{,}84x = 0$; 24) $\ln(8x) - 9x + 3 = 0$; 25) $2{,}33\sin(2{,}86x) - 2x = 0$;
26) $\exp(-0{,}8x) - 4x = 0$; 27) $0{,}49\exp(-1{,}18x) - x^2 = 0$; 28) $tg(1{,}262x + 0{,}154) - 1{,}84x = 0$;
29) $0{,}4x^2 - e^{-x} = 0$; 30) $0{,}89x^3 - 2{,}8x^2 - 3{,}7x + 11{,}2 = 0$; 31) $0{,}48\,x^2 - e^{-x} = 0$;
32) $3\cos(1{,}262x) - 1{,}84x = 0$; 33) $0{,}343\exp(-1{,}77x) - x^3 = 0$; 34) $\exp(-1{,}6x) - 16x^2 = 0$;
35) $x^2 - \cos(0{,}5x) = 0$; 36) $1{,}85\sin(1{,}262x + 0{,}308) - 1{,}84x = 0$; 37) $\ln(4{,}6x)^{1/2} = 2{,}6x - 0{,}75$;
38) $tg(2{,}2x) - 3{,}2x = 0$; 39) $5x^2 - 0{,}4e^{-0{,}6x} = 0$; 40) $1{,}4\sin(4{,}8x) - 1{,}125x = 0$;
41) $\ln(3{,}66x) - 4{,}12x + 1{,}5 = 0$; 42) $0{,}89x^3 - 2{,}8x^2 - 3{,}7x + 11{,}2 = 0$.

3.Методом простих ітерацій розв'язати наступну систему рівнянь з точністю до $\varepsilon = 10^{-2}$:

1) $\begin{cases} \sin(x - 0.6) - y - 1{,}6 = 0 \\ 3x - \cos y - 0{,}9 = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \sin(3x + 0{,}14) + y = 1 \\ 3x + \cos(1{,}57y) = 3 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \sin(2{,}17y - 0.6) - x - 0{,}1 = 0 \\ 3y - \cos 3{,}14x - 4{,}1 = 0 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} \sin(4x - 0{,}86) + y = 1 \\ 3x + \cos(2{,}57y - 1) = 3 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} \sin(4{,}91x - 0.2) + y - 1{,}6 = 0 \\ 3x - \cos 3{,}14y - 3{,}95 = 0 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} \sin(x - 0.6) - y - 1{,}6 = 0 \\ 3x - \cos y - 0{,}9 = 0 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} \sin(2x - 0.3) - y - 1{,}6 = 0 \\ 6x - \cos y - 0{,}5 = 0 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} \sin(2{,}17x - 0.6) - y - 1{,}06 = 0 \\ 2x - \cos y - 0{,}98 = 0 \end{cases}$; 9) $\begin{cases} \sin(y + 1) - x = 1 \\ 4y + 2\cos x - 4 = 0 \end{cases}$;

10) $\begin{cases} \sin(2x + 0{,}185) + y - 1{,}785 = 0 \\ 3x - \cos y - 0{,}9 = 0 \end{cases}$; 11) $\begin{cases} \sin(x - 0.5) - 2y - 1{,}5 = 0 \\ 3x - \cos(2y) - 0{,}8 = 0 \end{cases}$; 12) $\begin{cases} \sin(y + 0{,}8) + 2x - 1 = 0 \\ 0{,}6y + \cos(x + 0{,}6) = 0 \end{cases}$;

13) $\begin{cases} \sin(2y + 0{,}8) + x - 1 = 0 \\ 1{,}2y + \cos(0{,}5x + 0{,}6) = 0 \end{cases}$; 14) $\begin{cases} tgy - \cos(1{,}5x) = 0 \\ 2x^3 - y^2 + 4y = 3 \end{cases}$; 15) $\begin{cases} tg(0{,}5x - 0.6) - 2y - 1{,}6 = 0 \\ 1{,}5x - \cos 2y - 0{,}9 = 0 \end{cases}$;

16) $\begin{cases} \cos(x - 1) + y - 0{,}5 = 0 \\ x - \cos y - 3 = 0 \end{cases}$; 17) $\begin{cases} \sin(y - 0.6) - x - 1{,}6 = 0 \\ 3y - \cos x - 0{,}9 = 0 \end{cases}$; 18) $\begin{cases} \cos(x + 1) - y = 1 \\ 2x + \sin y = 2 \end{cases}$;

19) $\begin{cases} \sin(x + 1) - y = 1 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$; 20) $\begin{cases} \sin(2x + 1) - 2y = 1 \\ 4x + \cos 2y = 2 \end{cases}$; 21) $\begin{cases} \sin(x) = -2y + 2 \\ x + \cos(y - 1) - 0{,}7 = 0 \end{cases}$;

22) $\begin{cases} \sin(x - 0{,}3) = -y + 2 \\ x + \cos(0{,}5y - 1) - 1 = 0 \end{cases}$; 23) $\begin{cases} \sin(x - 0.6) - 2y + 1 = 0 \\ x + \cos y - 1{,}5 = 0 \end{cases}$; 24) $\begin{cases} \sin(x) + y = -0{,}4 \\ -x + \cos(y + 0{,}5) = 2 \end{cases}$;

25) $\begin{cases} \sin(x) + y = -0{,}4 \\ -x + \cos(y + 0{,}5) = 2 \end{cases}$; 26) $\begin{cases} \sin(0{,}57x + 1) - y = 1 \\ 2x + \cos y = 3 \end{cases}$; 27) $\begin{cases} \cos(x - 0{,}5) - y - 2 = 0 \\ 2x - \sin y + 1 = 0 \end{cases}$;

28) $\begin{cases} 2\sin(x + 1) - y = 2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$; 29) $\begin{cases} \sin(2x + 1) - 2y = 1 \\ 4x + \cos 2y = 2 \end{cases}$; 30) $\begin{cases} \sin(2x + 1) - 3y = 1 \\ 4x + \cos 3y = 2 \end{cases}$; 31) $\begin{cases} tgy - \cos(1{,}5x) = 0 \\ 2x^3 - y^2 + 4y = 3 \end{cases}$.

Бібліографія до розділу 4: [2, 5, 17-28, 33, 38].